Lineare algebraische Gruppen
Vorlesung 12 im Wintersementer 2020/21 (am 29.01.21)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
Vorlesung x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zu Vorlesung x.

Grundlegende Ergebnisse zur Theorie der linearen algebraischen Gruppen

12. Die Jordan-Zerlegung IV

12.8 Verallgemeinerung auf den lokal endlichen Fall

Bemerkungen

(v) Seien $a \in \mathrm{End}(V)$ ein lokal endlicher Endomorphismus des k-Vektorraums V und $W \subseteq V$ ein a-stabiler k-linearer Unterraum von V, wobei V und W nicht notwendig von endlicher Dimension sein müssen. Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. $a|_W$ ein ein lokal endlicher Endomorphismus.
2. $a|_W = a_s|_W + a_n|_W$ ist die additve Jordan-Zerlegung der Einschränkung von a auf W. Insbesondere ist W sowohl a_s-stabil als auch a_n-stabil.

Weiter seien $\bar{a}$, $\bar{a}_s$ und $\bar{a}_n$ die durch a, a_s bzw. a_n induzierten k-linearen Abbildungen auf dem Faktorraum $\bar{V} = V/W$. Dann gelten folgende Aussagen.

3. $\bar{a}$ ist ein lokal endlicher Endomorphismus von $\bar{V}$.
4. $\bar{a} = \bar{a}_s + \bar{a}_n$ ist die additive Jordan-Zerlegung von $\bar{a}$ (vgl. 2.4.4 (iii)).

(vi) Sei $\phi: V \longrightarrow W$ eine k-lineare Abbildung von k-Vektorräumen (deren Dimension nicht notwendig endlich sein muß) und $a \in \mathrm{End}(V)$, $b \in \mathrm{End}(W)$ lokal endliche Endomorphismen mit

$$\phi \circ a = b \circ \phi.$$

Dann gilt auch $\phi \circ a_s = b_s \circ \phi$. und $\phi \circ a_n = b_n \circ \phi$.

(vii) <u>Mulitplikative Jordan-Zerlegung</u>. Sei $a \in \mathbf{GL}(V)$ ein lokal endlicher Automorphismus des nicht notwendig endlich-dimensionalen k-Vektorraums V. Dann gibt es genau eine Darstellung von a,

$$a = a_s \bullet a_u, \tag{2}$$

als Zusammensetzung von zwei lokal endlichen linearen Automorphismen mit

1. a_s ist halbeinfach und a_u ist lokal unipotent.
2. $a_s \bullet a_u = a_u \bullet a_s$.

Für jeden endlich-dimensionalen a-stabilen k-linearen Unterraum $W \subseteq V$ ist dann

$$a|_W = a_s|_W \cdot a_u|_W$$

die multiplikative Jordan-Zerlegung der Einschränkung von a auf W. Durch diese Eigenschaft ist die multiplikative Jordan-Zerlegung charakterisiert. Die Aussage gibt dann aber auch ohne die Forderung, daß W endlich-dimensionale sein soll.

Außerdem ist dann auch für jeden a-stabilen k-linearen Unterraum $W \subseteq V$

$$\overline{a} = \overline{a_s} \cdot \overline{a_u}$$

die multiplikative Jordan-Zerlegung von $\overline{a}$, wobei $\overline{a}$, $\overline{a_s}$ und $\overline{a_u}$ die durch a, a_s und a_u auf dem Faktorraum V/W induzierten Endomorphismen seien.

(viii) Seien V und W nicht notwendig endlich-dimensionale k-Vektorräume, a und b zwei lokal endliche lineare Automorphismen von V bzw. W,

$$a \in GL(V),\ b \in GL(W),$$

und

$$a = a_s a_u \text{ und } b = b_s b_u$$

deren multiplikative Jordan-Zerlegungen. Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. $a \oplus b = (a_s \oplus b_s) \cdot (a_u \oplus b_u)$ ist die Jordan-Zerlegung von $a \oplus b \in \mathbf{GL}(V \oplus W)$.

2. $a \otimes b = (a_s \otimes b_s) \cdot (a_u \otimes b_u)$ ist die Jordan-Zerlegung von $a \oplus b \in \mathbf{GL}(V \otimes W)$.

Beweis.

Zu (v). 1. Schritt. $a|_W$ ist lokal endlich.

Sei $v \in W - \{0\}$. Wir haben zu zeigen v liegt in einem endlich-dimensionalen k-linearen und $a|_W$-stabilen Unterraum von W. Weil a lokal endich ist, gibt es einen k-linearen Unterraum $W' \subseteq V$ mit

$$\dim_k W' < \infty,\ a(W') \subseteq W' \text{ und } v \in W'.$$

Weil W nach Voraussetzung a-stabil ist und den Vektor v enthält, bleiben diese Bedingungen an W' erhalten, wenn man W' durch $W \cap W'$ ersetzt. Damit ist aber $W \cap W'$ ein Unterraum der gesuchten Art.

2. Schritt. W ist a_s-stabil und a_n-stabil.

Sei $v \in W$. Wir haben zu zeigen, $a_s(v) \in W$ und $a_n(v) \in W$.

Weil nach dem ersten Schritt $a|_W$ lokal endlich ist, gibt einen einen k-linearen Unterraum W' von W mit

$$\dim_k W' < \infty,\ a(W') \subseteq W' \text{ und } v \in W'.$$

Nach (iv) ist

$$a|_{W'} = a_s|_{W'} + a_n|_{W'}$$

gerade die Jordan-Zerlegung der Einschränkung $a|_{W'}$ von a auf W', und W' ist sowohl a_s-stabil als auch a_n-stabil. Wegen $v \in W'$ folgt

$$a_s(v) \in a_s(W') \subseteq W' \subseteq W$$

und

$$a_n(v) \in a_n(W') \subseteq W' \subseteq W.$$

3. <u>Schritt</u>. . $a|_W = a_s|_W + a_n|_W$ ist die additve Jordan-Zerlegung von $a|_W$
Nach (iv) reicht es zu zeigen, für jeden endlich-dimensionalen k-linearen und $a|_W$-stabilen Unterraum $W'\subseteq W$ ist

$$a|_W|_{W'} = a_s|_W|_{W'} + a_n|_W|_{W'}$$

die additive Jordan-Zerlegung von $a|_W|_{W'}$, d.h.

$$a|_{W'} = a_s|_{W'} + a_n|_{W'}$$

ist die additive Jordan-Zerlegung von $a|_{W'}$. Weil die Dimension von W' endlich ist, ist das aber nach (iv) der Fall.

4. <u>Schritt</u>. $\bar a$ ist lokal endlich.
Bezeichne

$$\rho: V \longrightarrow V/W = \bar V$$

die natürliche Abbildung auf den Vektorraum. Wir haben zu zeigen, jeder Vektor

$$\bar v \in \bar V - \{0\}$$

liegt in einem k-linearen, endlich-dimensionalen und $\bar a$ n Unterraum von $\bar V$. Zum Beweis wählen wir einen Vektor

$$v \in V \text{ mit } \rho(v) = \bar v.$$

Weil a lokal endlich ist, gibt es einen k-linearern Unterraum $W' \subseteq V$ mit

$$\dim_k W' < \infty,\ a(W') \subseteq W' \text{ und } v \in W'.$$

$$\begin{array}{ccccc} W' & \hookrightarrow & V & \xrightarrow{\rho} & V/W \\ a|_{W'}\downarrow & & \downarrow a & & \downarrow \bar a \\ W' & \hookrightarrow & V' & \xrightarrow{\rho} & V/W \end{array}$$

Mit

$$\bar W' := \rho(W')$$

gilt dann

$$\dim_k \bar W' < \infty,\ \bar a(\bar W') \subseteq \bar W' \text{ und } \bar v \in \bar W'.$$

5. <u>Schritt</u>. $\bar a = \bar a_s + \bar a_n$ ist die additive Jordan-Zerlegung von $\bar a$.

Nach (iv) reicht es zu zeigen, für jeden endlich-dimensionalen k-linearen und $\bar a$-stabilen Unterraum $\bar W' \subseteq \bar V$ ist

$$\bar a|_{\bar W'} = \bar a_s|_{\bar W'} + \bar a_n|_{\bar W'}$$

die Jordan-Zerlegung von $\bar a|_{\bar W'}$.

Weil die Dimension von $\bar W'$ endlich ist, gibt es k-linearen Unterraum
$W' \subseteq V$ mit

$$\dim_k W' < \infty \text{ und } \rho(W') = \bar W'.$$

Weil a lokal endlich ist und W' von endlicher Dimension, gibt es einen k-linearen Unterraum V' von V mit

$$\dim V' < \infty,\ a(V') \subseteq V',\ W' \subseteq V'.$$

Sei

$$\rho' := \rho|_{V'} : V' \longrightarrow \overline{V}' := V'+W/W = V'/V'\cap W$$

die Einschränkung des natürlichen Homomorphismus ρ. Wegen $\overline{W}' \subseteq \overline{V}'$ gilt

$$\overline{W}' = \rho(W') \subseteq \rho(V') = \rho'(V').$$

Weil $\rho':V' \longrightarrow V'/V'\cap W$ surjektiv ist, folgt

$$\overline{W}' = \rho'(\rho'^{-1}(\overline{W}')),$$

d.h. $\overline{W}'$ ist das Bild des endlich-dimensionalen Unterraums $\rho'^{-1}(\overline{W}')$ von V'. Wir können also annehmen,

$$W' := \rho'^{-1}(\overline{W}') \ (\subseteq V').$$

Für $x \in W' \subseteq V'$ gilt, weil V' a-stabil ist, $a(x) \in V'$ und

$$\begin{aligned}
\rho'(a(x)) &= \rho(a(x)) && (\rho' \text{ ist die Einschränkung von } \rho \text{ auf } V')\\
&= \overline{a}(\rho(x)) && (\text{Definition von } \overline{a})\\
&= \overline{a}(\rho'(x)) && (x \text{ liegt in } W' \subseteq V')\\
&\in \overline{a}(\overline{W}') && (\text{wegen } x \in W' = \rho'^{-1}(\overline{W}'))\\
&\subseteq \overline{W}' && (\overline{W}' \text{ ist } \overline{a}\text{-stabil})
\end{aligned}$$

Es folgt

$$a(x) \in \rho'^{-1}(\overline{W}') = W' \text{ für jedes } x \in W',$$

d.h. W' ist a-stabil. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & W' \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "h'"] & & V' \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "h'"] & & V \arrow[dd, "h"] \\
W' \arrow[ur, "a''"] \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "h''"] & & V' \arrow[ur, "a'"] \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "h'"] & & V \arrow[ur, "a"] \arrow[dd, "h"] & \\
 & \overline{W}' \arrow[rr, hook] & & \overline{V}' \arrow[rr, hook] & & \overline{V} \\
\overline{W}' \arrow[ur, "\overline{a}''"] \arrow[rr, hook] & & \overline{V}' \arrow[ur, "\overline{a}'"] \arrow[rr, hook] & & \overline{V} \arrow[ur, "\overline{a}"] &
\end{tikzcd}$$

Die horizontalen Pfeile bezeichnen natürliche Einbettungen, die oberen von $W'\subseteq V'\subseteq V$ ineinander, die unteren der Faktorräume $\overline{W}'\subseteq \overline{V}'\subseteq \overline{V}$ ineinander. Die vertikalen Abbildungen sind die natürlichen Abbildungen auf die jeweiligen Faktorräume, so daß die vorderen und hinteren Vierecke kommutativ sind.

Die Kommutativität der oberen Vierecke definiert a' und a'' als Einschränkungen von a auf V' bzw. W'.

Die Kommutativität der unteren Vierecke definiert $\overline{a}'$ und $\overline{a}''$ als Einschränkungen von $\overline{a}$ auf $\overline{V}'$ bzw. $\overline{W}'$.

Die Kommutativität der beiden seitlichen und des mittleren Vierecks definiert $\overline{a}$, $\overline{a}'$ und $\overline{a}''$ als die durch a, a' und a'' auf den Faktorräumen induzierten Abbildungen. Dies ist mit den vorherigen Definitionen als Einschränkungen verträglich, weil der Übergang zum Faktorraum mit Inklusionen verträglich ist.

So können wir erst zu der durch a induzierten Abbildung $\overline{a}$ auf dem Faktorraum übergehen,

$\bar{a}: \bar{V} \longrightarrow \bar{V}$, x mod W $\mapsto$ a(x) mod W,

und dann diese Abbildung auf $\bar{W}'$ einschränken zu

$\bar{a}'': \bar{W}' \longrightarrow \bar{W}'$, x mod W $\mapsto$ a(x) mod W.

Wir können aber auch a zuerst auf W' einschränken,

$a'': W' \longrightarrow W'$, $x \mapsto a(x)$,

und dann die induzierte Abbildung auf dem Faktorraum bilden,

$\bar{a}'': \bar{W}' \longrightarrow \bar{W}'$, x mod W $\mapsto$ a(x) mod W.

das Ergebnis ist in beiden Fällen dasselbe. Aus der Jordan-Zerlegung

$a = a_s + a_n$

wird im zweiten Fall zunächst die Jordan-Zerlegung

$a|_{W'} = a_s|_{W'} + a_n|_{W'}$

und dann nach 2.4.4 (iii) - weil W' endlich-dimensional ist - die Jordan-Zerlegung

$\bar{a}''|_{\bar{W}'} = \bar{a}''_s|_{\bar{W}'} + \bar{a}''_n|_{\bar{W}'}$

Da diese Abbildungen gleichzeitig die Einschränkungen auf $\bar{W}'$ der entsprechenden Endomorphismen von $\bar{V}$ sind, bedeutet dies (nach (iv)), daß die auf $\bar{V}$ induzierten Abbildungen gerade die Jordan-Zerlegung von $\bar{a}$ definieren,

$\bar{a}'' = \bar{a}''_s + \bar{a}''_n$.

<u>Zu (vi)</u>. Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie der von 2.4.4.(iv). Wir betrachten das Diagramm von k-linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & V\oplus W \\ \downarrow a & & \downarrow a\oplus b \\ V & \xrightarrow{i} & V\oplus W \end{array}$$

mit

$$i = (id, \phi)\ V \longrightarrow V\oplus W,\ x \mapsto (x, \phi(x)).$$

Es ist kommutativ, denn für $x \in V$ gilt

$(a\oplus b)(i(x))$	$= (a\oplus b)(x, \phi(x))$	(nach Definition von i)
	$= (a(x), b(\phi(x)))$	(nach Definition von $a\oplus b$)
	$= (a(x), \phi(a(x)))$	(nach Voraussetzung gilt $\phi\circ a = b\circ\phi$)
	$= i(a(x))$	(nach Definition von i).

Nach Definition ist i injektiv. Deshalb können wir V mit seinem Bild bei i identifizieren und als linearen Unterraum von $V\oplus W$ betrachten. Die Kommutativität des Vierecks bedeutet dann, der Unterraum V von $V\oplus W$ ist stabil bezüglich $a\oplus b$ und die Einschränkung von $a\oplus b$ auf V ist gerade a.

Betrachten wir die additive Jordan-Zerlegung von $a\oplus b$:

$$a\oplus b = (a\oplus b)_s + (a\oplus b)_n. \qquad (5)$$

Nach (v) ist

$$a = (a\oplus b)_s|_V + (a\oplus b)_n|_V \qquad (6)$$

die Jordan-Zerlegung von a.

1. <u>Schritt</u>. Die Summanden auf der rechten Seite von (5) haben die Gestalt

$$(a\oplus b)_s = a_s\oplus b_s \text{ und } (a\oplus b)_n = a_n\oplus b_n$$

Sei $U \subseteq V\oplus W$ ein endlich-dimensionaler k-linearer Unterraum, welcher stabil ist bei $a_s\oplus b_s$ (bzw. bei $a_n\oplus b_n$). Dann gibt es endlich-dimensionale k-lineare Unterräume

$$V' \subseteq V \text{ und } W' \subseteq W$$

mit

$$U \subseteq V'\oplus W'.$$

Indem wir V' und W' geeignet vergrößern können wir außerdem erreichen (vgl. (iv)):

V' ist stabil unter a (also auch bei a_s und a_n)

W' ist stabil unter b (also auch bei b_s und b_n).

Nach Definition sind mit a_s und b_s auch $a_s|_{V'}$ und $b_s|_{W'}$ halbeinfach und weil a_n und b_n lokal nilpotent sind, sind es auch $a_n|_{V'}$ und $b_n|_{W'}$. Nach 2.3.3 (ii) folgt:

$(a_s\oplus b_s)|_{V'\oplus W'} = (a_s|_{V'})\oplus(b_s|_{W'})$ ist halbeinfach und

$(a_n\oplus b_n)|_{V'\oplus W'} = (a_n|_{V'})\oplus(b_n|_{W'})$ ist nilpotent.

Nach 2.4.4 (iii) bleiben diese Eigenschaften erhalten, wenn man die Abbildungen auf stabile Unterräume einschränkt, d.h.

$(a_s\oplus b_s)|_U$ ist halbeinfach (bzw. $(a_n\oplus b_n)|_U$ ist nilpotent).

Da dies für jeden endlich-dimensionalen k-linearen Unterraum U von $V\oplus W$ gilt, welcher stabil ist unter $a_s\oplus b_s$ (bzw. $a_n\oplus b_n$), erhalten wir:

$a_s\oplus b_s$ ist halbeinfach und $a_n\oplus b_n$ ist lokal nilpotent.

Außerdem gilt

$$a\oplus b = a_s\oplus b_s + a_n\oplus b_n$$

denn für $x \in V$ und $y \in W$ ist

$$\begin{aligned}(a_s\oplus b_s + a_n\oplus b_n)(x,y) &= (a_s\oplus b_s)(x,y) + (a_n\oplus b_n)(x,y)\\ &= (a_s(x), b_s(y)) + (a_n(x),b_n(y))\\ &= (a_s(x) + a_n(x), b_s(y) + b_n(y))\\ &= (a(x), b(y))\\ &= (a\oplus b)(x,y).\end{aligned}$$

Nach (iii) reicht es zu zeigen, daß $a_s\oplus b_s$ und $a_n\oplus b_n$ kommutieren. Das ist aber der Fall, denn für $x \in V$ und $y \in W$ gilt

$$\begin{aligned}((a_s\oplus b_s)\circ(a_n\oplus b_n))(x,y) &= (a_s\oplus b_s)(a_n(x),b_n(y))\\ &= (a_s(a_n(x)), b_s(b_n(y))\\ &= (a_n(a_s (x)), b_n(b_s(y)) \quad (a_s \text{ und } a_n \text{ bzw. } b_s \text{ und } b_n \text{ kommutieren})\\ &= (a_n\oplus b_n)(a_s(x),b_s(y))\\ &= ((a_n\oplus b_n)\circ(a_s\oplus b_s))(x,y).\end{aligned}$$

2. <u>Schritt</u>. Beweis der Behauptung.

Für jedes $x \in V$ gilt

$$\begin{aligned}a_s(x) &= (a\oplus b)_s|_V(x) && \text{(weil (6) die Jordan-Zerlegung von a ist, vgl. (v))}\\ &= (a\oplus b)_s(i(x)) && \text{(wir identifizieren V mit seinem Bild bei i)}\\ &= (a_s\oplus b_s)(x, \varphi(x)) && \text{(Definition von i)}\end{aligned}$$

$= (a_s(x),b_s(\phi(x)))$

Dabei haben wir $a_s(x)$ mit seinem Bild bei i identifiziert, d.h. genauer bedeutet diese Identität,

$$i(a_s(x)) = (a_s(x),b_s(\phi(x))) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h.

$$(a_s(x), \phi(a_s(x))) = (a_s(x),b_s(\phi(x))).$$

Insbesondere ist also

$$\phi(a_s(x)) = b_s(\phi(x)) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h. wie behauptet ist

$$\phi\circ a_s = b_s\circ\phi.$$

Damit besteht die erste behauptete Identiät. Die analgoge Rechnung mit a_n anstelle von a_s führt zur zweiten: für jedes $x \in V$ gilt

$$
\begin{array}{lll}
a_n(x) & = (a\oplus b)_n|_V(x) & \text{(weil (6) die Jordan-Zerlegung von a ist, vgl. (v))} \\
& = (a\oplus b)_n(i(x)) & \text{(wir identifizieren V mit seinem Bild bei i)} \\
& = (a_n\oplus b_n)(x, \varphi(x)) & \text{(Definition von i)} \\
& = (a_n(x),b_n(\phi(x))) &
\end{array}
$$

Dabei haben wir $a_n(x)$ mit seinem Bild bei i identifiziert, d.h. genauer bedeutet diese Identität,

$$i(a_n(x)) = (a_n(x),b_n(\phi(x))) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h.

$$(a_n(x), \phi(a_n(x))) = (a_n(x),b_n(\phi(x))).$$

Insbesondere ist also

$$\phi(a_n(x)) = b_n(\phi(x)) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h. wie behauptet ist

$$\phi\circ a_n = b_n\circ\phi.$$

Zu (vii). Für jeden endlich-dimensionalen a-stabilen Unterraum $W \subseteq V$ haben wir die multiplikative Jordan-Zerlegung

$$a|_W = (a|_W)_s \bullet (a|_W)_u .$$

Für je zwei solche Unterräume, sagen wir W' und W" können wir die zugehörigen Zerlegungen

$$a|_{W'} = (a|_{W'})_s \bullet (a|_{W'})_u \text{ und } a|_{W''} = (a|_{W''})_s \bullet (a|_{W''})_u$$

auf dem Durchschnitt $W'\cap W''$ einschränken und erhalten so die zugehörige Zerlegung für $a|_{W'\cap W''}$ (weil dies für die additiven Zerlegungen gilt - vgl. 2.4.4 (iii) - und die additiven und multiplikativen Zerlegungen für umkehrbare Matrizen durch einfache Umformungen auseinander hervorgehen). Wegen der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung (im endlich-dimensionalen Fall) folgt

$$(a|_{W'})_s|_{W'\cap W''} = (a|_{W'\cap W''})_s = (a|_{W''})_s|_{W'\cap W''}$$

und

$$(a|_{W'})_u|_{W'\cap W''} = (a|_{W'\cap W''})_u = (a|_{W''})_u|_{W'\cap W''}$$

Mit anderen Worten: durchläuft W die endlich-dimensionalen a-stabilen Unterräume von V, so stimmen je zwei der Abbildungen

$$(a|_W)_s \text{ bzw. } (a|_W)_u$$

auf dem gemeinsamen Teil ihrer Definitionsbereiche überein. Sie lassen sich also zu einer auf ganz V definierten k-linearen Abbildung

$$a_s \text{ bzw. } a_u$$

verheften mit

$$a_s|_W = (a|_W)_s \text{ bzw. } a_u|_W = (a|_W)_u$$

für jeden a-stabilen k-linearen Unterraum $W \subseteq V$ von endlicher Dimension. Insbesondere sind a_s und a_u lokal endlich, a_s ist halbeinfach und a_u lokal unipotent, und es gilt

$$a = a_s \bullet a_u = a_u \bullet a_s .$$

Sei eine weitere multiplikative Jordan-Zerlegung gegeben, sagen wir

$$a = a'_s \bullet a'_u = a'_u \bullet a'_s .$$

(mit a'_s und a'_u lokal endlich, a'_s halbeinfach und a'_u unipotent).
Wir schreiben

$$a = a'_s \bullet (1 + a'_u - 1) = a'_s + a'_s(a'_u - 1) = a'_s + a'_n$$

mit

$$a'_n = a'_s(a'_u - 1)$$

Weil a'_s und a'_u kommutieren, kommutieren auch a'_s und a'_n. Außerdem ist deshalb a'_n lokal nilpotent. Damit ist

$$a = a'_s + a'_n$$

eine additive Jordan-Zerlegung, also eindeutig durch a bestimmt. Wegen

$$a'_u = a'^{-1}_s a'_n + 1$$

ist dann aber auch die multiplikative Zerlegung eindeutig festgelegt.
Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Der zweite gilt nach Konstruktion zumindest für endlich-dimensionale k-lineare a-stabile Unterräume $W \subseteq V$. Im Fall

$$\dim W = \infty$$

gilt die Aussage zumindest für alle endlich-dimensionalen k-linearen a-stabilen Unterräume $W' \subseteq W$. Auf Grund der obigen Konstruktionen gilt sie dann aber auch für W.
Die Aussagen bezüglich der auf dem Faktorraum V/W induzierten Abbildungen ergeben sich in analoger Weise aus den entprechenden Aussagen von (v) bezüglich der additiven Jordan-Zerlegung.

<u>Zu (viii)</u>. Sei $U \subseteq V \oplus W$ (bzw. $U \subseteq V \otimes W$)ein k-linearer Unterraum mit

$$\dim_k U < \infty \quad \text{und } (a\oplus b)(U) \subseteq U \text{ (bzw. } (a\otimes b)(U) \subseteq U).$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$a\oplus b|_U = (a_s \oplus b_s)|_U \bullet (a_u \oplus b_u)|_U$$

ist die Jordan-Zerlegung von $a\oplus b|_U \in \mathbf{GL}(U)$

bzw.

$$a\otimes b|_U = (a_s \otimes b_s)|_U \bullet (a_u \otimes b_u)|_U$$

ist die Jordan-Zerlegung von $a\oplus b|_U \in \mathbf{GL}(U)$.

Weil die Dimension von U endlich ist, gibt es endlich-dimensionale k-lineare Unterräume

$$V' \subseteq V \text{ und } W' \subseteq W \text{ mit } U \subseteq V'\oplus W' \text{ (bzw. } U \subseteq V'\otimes W'\text{)}.$$

Weil V' und W' endlich-dimensional sind (und a, b lokal endlich), können wir diese Räume soweit vergrößern, daß außerdem gilt

V' ist a-stabil und W' ist b-stabil.

Nach dem zweiten Teil von (vii) sind

$$a|_{V'} = (a_s|_{V'})(a_u|_{V'}) \text{ und } b|_{W'} = (b_s|_{W'})(b_u|_{W'})$$

die Jordan-Zerlegungen von $a|_{V'}$ und $b|_{W'}$. Wir wenden 2.4.6 an und erhalten die Jordan-Zerlegungen für die direkte Summe und das Tensorprodukt von $a|_{V'}$ und $b|_{W'}$:

$$\begin{aligned}(a\oplus b)|_{V'\oplus W'} &= (a|_{V'})\oplus(b|_{W'}) = (a_s|_{V'})\oplus(b_s|_{W'})\bullet(a_u|_{V'})\oplus(b_u|_{W'})\\ &= (a_s\oplus b_s)|_{V'\oplus W'}\bullet(a_u\oplus b_u)|_{V'\oplus W'}\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}(a\otimes b)|_{V'\otimes W'} &= (a|_{V'})\otimes(b|_{W'}) = (a_s|_{V'})\otimes(b_s|_{W'})\bullet(a_u|_{V'})\otimes(b_u|_{W'})\\ &= (a_s\otimes b_s)|_{V'\otimes W'}\bullet(a_u\otimes b_u)|_{V'\otimes W'}\end{aligned}$$

Nach 2.4.4 (iii) sind additive Jordan-Zerlegungen im endlich-dimensionalen Fall verträglich mit Einschränkungen auf stabile k-lineare Unterräume. Das gilt dann aber auch für multiplikative Jordan-Zerlegungen. Deshalb ist

$$(a\oplus b)|_U = (a_s\oplus b_s)|_U\bullet(a_u\oplus b_u)|_U$$

bzw.

$$(a\otimes b)|_U = (a_s\otimes b_s)|_U\bullet(a_u\otimes b_u)|_U$$

eine Jordan-Zerlegung der Einschränkung von $a\oplus b$ bzw. $a\otimes b$ auf U. Da dies für alle k-linearen Unterräume U von $V\oplus W$ (bzw. $V\otimes W$) gilt mit

$$\dim_k U < \infty \text{ und } (a\oplus b)(U) \subseteq U \text{ (bzw. } (a\otimes b)(U) \subseteq U\text{)}.$$

erhalten wir auf Grund der Konstruktion der multiplikativen Jordan-Zerlegung in (vii), daß

$$a\oplus b = (a_s\oplus b_s)\bullet(a_u\oplus b_u)$$

bzw.

$$a\otimes b = (a_s\otimes b_s)\bullet(a_u\otimes b_u)$$

die Jordan-Zerlegungen von $a\oplus b$ und $a\otimes b$ sind.

QED.

Beispiel

Seien G eine lineare algebraische Gruppe, A := k[G] und $g \in G$. Dann ist die Rechtstranslation mit g,

$$\rho(g): A \longrightarrow A,\ f(x) \mapsto f(xg)$$

(vgl. 2.3.6.B), ein lokal endlicher linearer Automorphismus von A (nach 3.3.9 Aufgabe 1). Damit besitzt $\rho(g)$ eine Jordan-Zerlegung

$$\rho(g) = \rho(g)_s\bullet\rho(g)_u$$

12. Die Jordan-Zerlegung IV

12.9 Satz: Jordan-Zerlegung in linearen algebraischen Gruppen

Seien G eine lineare algebraische Gruppe und ρ wie im obigen Beispiel. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Jordan-Zerlegung in G. Für jedes $g \in G$ gibt es genau ein Paar (g_s, g_u) von Elementen aus G mit den folgenden Eigenschaften.

1. $g = g_s \cdot g_u = g_u \cdot g_s$
2. $\rho(g_s) = \rho(g)_s$ und $\rho(g_u) = \rho(g)_u$.

(ii) Für jeden Homomorphismus $\phi: G \longrightarrow G'$ von algebraischen Gruppen und jedes $g \in G$ gilt

$$\phi(g_s) = \phi(g)_s \text{ und } \phi(g_u) = \phi(g)_u.$$

(iii) Für $g \in G = GL_n$ sind g_s und g_u gerade die halbeinfachen bzw. unipotenten Teile von g (im Sinne der Bemerkung von 2.4.5 mit $V = k^n$).

Bemerkung

Ein Element g einer linearen algebraischen Gruppe G heißt halbeinfach (bzw. unipotent), wenn $g = g_s$ bzw. $g = g_u$ gilt. Die zu $g \in G$ gehörigen Elemente g_s und g_u von (i) heißen halbeinfacher Teil bzw. unipotenter Teil des Elements $g \in G$. Ein Element $g \in G$ heißt halbeinfach bzw unipotent

Beweis. Zu (i).1. Schritt. Beweis der Existenz gewisser Elemente g_s und g_u von G. Seien

$$A := k[G]$$

der Koordinatenring von G und

$$m: A\otimes A \longrightarrow A,\ \alpha\otimes\beta \mapsto \alpha\cdot\beta,$$

der k-Algebra-Homomorphismus, welcher durch die Multiplikation der Algebra induziert wird. Dann ist für jedes $g \in G$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[G]\otimes_k k[G] & \xrightarrow{\rho(g)\otimes\rho(g)} & k[G]\otimes_k k[G] \\ m\downarrow & & \downarrow m \\ k[G] & \xrightarrow{\rho(g)} & k[G] \end{array}$$

kommutativ, denn die Abbildungsvorschriften in diesem Diagramm sind wie folgt.

$$\begin{array}{ccc} \alpha(x)\cdot\beta(y) & \mapsto & \alpha(xg)\cdot\beta(yg) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\alpha\cdot\beta)(x) & \mapsto & (\alpha\cdot\beta)(xg) \end{array}$$

Wir haben dabei das Tensorprodukt $k[G]\otimes_k k[G]$ mit dem Koordinatenring $k[G\times G]$ identifiziert, so daß für reguläre Funktionen $\alpha,\beta: G \longrightarrow k$, d.h. Elemente $\alpha,\beta\in k[G]$ das Element $\alpha\otimes\beta\in k[G]\otimes_k k[G]$ zur regulären Funktion

$$G\times G \longrightarrow k,\ (x,y) \mapsto \alpha(x)\cdot\beta(y),$$

wird. Man beachte, die Multiplikation $m: k[G]\otimes_k k[G] \longrightarrow k[G]$ wird induziert durch die Diagonaleinbettung

$$d: G \longrightarrow G\times G,\ x \mapsto (x,y),$$

sodaß für $\gamma\in k[G]$ mit der obigen Identifizierung

$$m(\gamma) = d^*(\gamma) = \gamma\circ d$$

gilt, d.h. $m(\gamma)(x) = \gamma(d(x)) = \gamma(x,x)$. Die Abbildungsvorschrift für m kann man deshalb in der Gestalt

$$k[G]\otimes_k k[G] \xrightarrow{m} k[G],\ \gamma(x,y) \mapsto \gamma(x,x).$$

schreiben. Die horizontalen Abbildungen des kommutativen Vierecks sind lokal endlich, und m ist als k-Algebra-Homomorphismus insbesondere k-linear. Das Viereck bleibt daher kommutativ, wenn man die horizontalen Abbildungen durch deren halbeinfache (bzw. deren lokal unipotente) Teile ersetzt. Wir erhalten kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} k[G]\otimes_k k[G] & \xrightarrow{(\rho(g)\otimes\rho(g))_s} & k[G]\otimes_k k[G] \\ m\downarrow & & \downarrow m \\ k[G] & \xrightarrow{\rho(g)_s} & k[G] \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} k[G]\otimes_k k[G] & \xrightarrow{(\rho(g)\otimes\rho(g))_u} & k[G]\otimes_k k[G] \\ m\downarrow & & \downarrow m \\ k[G] & \xrightarrow{\rho(g)_u} & k[G] \end{array}$$

(vgl. Bemerkung 2.4.7 (vi)). Wegen

$$(\rho(g)\otimes\rho(g))_s = \rho(g)_s\otimes\rho(g)_s \text{ und } (\rho(g)\otimes\rho(g))_u = \rho(g)_u\otimes\rho(g)_u$$

(vgl. Bemerkung 2.4.7 (viii)) bedeutet die Kommutativität der beiden Vierecke, daß

$$\rho(g)_s \text{ und } \rho(g)_u$$

Ring-Homomorphismen sind. Da sie außerdem auch k-linear sind, sind es sogar k-Algebra-Homomorphismen. Wir setzen sie zusammen mit der Auswertung im neutralen Element und erhalten k-Algebra-Homomorphismen

$$A \xrightarrow{\rho(g)_s} A \longrightarrow k,\ f \mapsto \rho(g)_s f \mapsto (\rho(g)_s f)(e),$$

$$A \xrightarrow{\rho(g)_u} A \longrightarrow k,\ f \mapsto \rho(g)_u f \mapsto (\rho(g)_u f)(e).$$

Nun ist aber jeder k-Algebra-Homomorphismus der Gestalt

$$k[G] = A \longrightarrow k$$

die Auswertung in einem eindeutig bestimmten Punkt von G (vgl. 1.3.2 und 1.3.3). Es gibt also eindeutig bestimmte Punkte

$$g_s,\ g_u \in G$$

mit

$$(\rho(g)_s(f))(e) = f(g_s) \text{ und } (\rho(g)_u(f))(e) = f(g_u) \text{ für jedes } f\in A. \tag{1}$$

2. <u>Schritt</u>. Die durch (1) definierten Punkte g_s und g_u haben die in (i) angegebenen Eigenschaften.

Wie wir wissen induziert die Operation von G auf sich selbst durch Rechtstranslationen

$$R: G \times G \longrightarrow G,\ (g, x) \mapsto x\cdot g^{-1},$$

auf dem Koordinatenring von G die Operation

$$\rho: G \longrightarrow GL(k[G]) \text{ mit } (\rho(g)f)(x) = f(xg) \text{ für } f\in k[G] \text{ und } g,x \in G.$$

Anstelle der Operation durch Rechtstranslationen kann man auch die durch Linkstranslationen,

$$L: G \times G \longrightarrow G,\ (g,x) \mapsto g\cdot x,$$

Die Operation von G auf sich durch Linkstranslationen,

$$L: G \times G \longrightarrow G,\ (g, x) \mapsto g\bullet x,$$

betrachten und erhält auf dem Koordinatenring die Operation

$$\lambda: G \longrightarrow GL(k[G]) \text{ mit } (\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}x) \text{ für } f\in k[G] \text{ und } g,x \in G.$$

(vgl. 2.3.6 B). Wegen

$$(a^{-1}\bullet x)\bullet b = a^{-1}\bullet(x\bullet b) \text{ für } a, b, x \in G$$

gilt $f((a^{-1}\bullet x)\bullet b) = f(a^{-1}\bullet(x\bullet b))$ für $f \in k[G]$, also $\rho(b)(\lambda(a)(f))=\lambda(a)(\rho(b)(f))$, also

$$\rho(b)\circ\lambda(a) = \lambda(a)\circ\rho(b) \text{ für } a,b\in G,$$

d.h. für beliebige a, b $\in$ G ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{tikzcd} k[G] \arrow[r, "\lambda(a)"] \arrow[d, "\rho(b)"'] & k[G] \arrow[d, "\rho(b)"] \\ k[G] \arrow[r, "\lambda(a)"] & k[G] \end{tikzcd}$$

Weil $\rho(b)$ lokal endlich ist, sind dann aber nach Bemerkung 2.4.7 (vi) die Diagramme

$$\begin{tikzcd} k[G] \arrow[r, "\lambda(a)"] \arrow[d, "\rho(b)_s"'] & k[G] \arrow[d, "\rho(b)_s"] \\ k[G] \arrow[r, "\lambda(a)"] & k[G] \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} k[G] \arrow[r, "\lambda(a)"] \arrow[d, "\rho(b)_u"'] & k[G] \arrow[d, "\rho(b)_u"] \\ k[G] \arrow[r, "\lambda(a)"] & k[G] \end{tikzcd} \tag{2}$$

kommutativ. Für $g,x \in G$ und $f\in A$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\rho(g)_s f)(x) &= (\lambda(x^{-1})(\rho(g)_s f))(e) && \text{(nach Definition von } \lambda) \\
&= \rho(g)_s(\lambda(x^{-1})f)(e) && (\rho(g)_s \text{ und } \lambda(x^{-1}) \text{ kommutieren nach (2))} \\
&= (\lambda(x^{-1})f)(g_s) && \text{(nach (1) mit } \lambda(x^{-1})f \text{ anstelle von f)} \\
&= f(xg_s) && \text{(nach Definition von } \lambda) \\
&= (\rho(g_s)f)(x) && \text{(nach Definition von } \rho(g_s))
\end{aligned}$$

also ist $\rho(g)_s f = \rho(g_s)f$ für jedes $f\in A$, also

$$\rho(g)_s = \rho(g_s).$$

Dieselbe Rechnung mit dem lokal unipotenten Teil von $\rho(g)$ anstelle des halbeinfachen zeigt

$$\rho(g)_u = \rho(g_u).$$

Die Elemente g_s und g_u genügen also der Bedingung 2 von (i).

Die multiplikative Jordan-Zerlegung

$$\rho(g) = \rho(g)_s\bullet\rho(g)_u = \rho(g)_u\bullet\rho(g)_s$$

von $\rho(g)$ läßt sich deshalb in der Gestalt

$$\rho(g) = \rho(g_s)\bullet\rho(g_u) = \rho(g_u)\bullet\rho(g_s)$$

schreiben. Weil $\rho: G \longrightarrow GL(k[G])$ ein Gruppen-Homomorphismus ist, folgt

$$\rho(g) = \rho(g_s\bullet g_u) = \rho(g_u\bullet g_s).$$

Nach 2.3.6 B ist der Gruppen-Homomorphismus ρ injektiv, d.h. es gilt

$g \quad = g_s\bullet g_u = g_u\bullet g_s.$
Die Elementen g_s und g_u genügen der Bedingung 1 von (i).
3. <u>Schritt</u>. Es gilt auch die Eindeutigkeitsaussage von (i).
Wegen der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung in **GL**(k[G]) (vgl. Bemerkung 2.4.7 (vii)) sind $\rho(g)_s$ und $\rho(g)_u$ eindeutig festgelegt durch g. Weil ρ injektiv ist, sind damit auch g_s und g_u eindeutig bestimmt.

<u>Zu (ii)</u>. Für jedes $g \in G$ betrachten wir das folgende Diagramm k-Algebra-Homomorphismen.

$$\begin{tikzcd} k[G'] \arrow[r, "\phi^*"] \arrow[d, "\rho(\phi(g))"'] & k[G] \arrow[d, "\rho(g)"] \\ k[G'] \arrow[r, "\phi^*"] & k[G] \end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm ist kommutativ, denn die Abbildungsvorschriften sind wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} f(x') & \mapsto & \phi^*(f)(x) \;=\; f(\phi(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(x'\bullet\phi(g)) & \mapsto & f(\phi(x)\bullet\phi(g)) = f(\phi(x\bullet g)) \end{array}$$

Dabei soll x' ein auf G' variierenden Argument bezeichnen und x eines auf G.

Als k-Algebra-Homomorphismen sind die Abbildungen des Diagramms insbesondere k-linear. Die vertikalen Abbildungen sind außerdem lokal endlich (nach 2.3.6 A (i)). Nach Bemerkung 2.4.7 (vi) können wir die vertikalen Abbildung durch deren halbeinfache bzw. lokal unipotente Teile ersetzen, ohne daß das Diagramm aufhört kommutativ zu sein, d.h. wir erhalten kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} k[G'] \arrow[r, "\phi^*"] \arrow[d, "\rho(\phi(g))_s"'] & k[G] \arrow[d, "\rho(g)_s"] \\ k[G'] \arrow[r, "\phi^*"] & k[G] \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} k[G'] \arrow[r, "\phi^*"] \arrow[d, "\rho(\phi(g))_u"'] & k[G] \arrow[d, "\rho(g)_u"] \\ k[G'] \arrow[r, "\phi^*"] & k[G] \end{tikzcd}$$

Nach Definition der halbeinfachen bzw. unipotenten Teile in linearen algebraischen Gruppen gilt

$$\rho(\phi(g))_s = \rho(\phi(g)_s) \text{ und } \rho(\phi(g))_u = \rho(\phi(g)_u),$$

d.h. die Diagramme

$$\begin{tikzcd} k[G'] \arrow[r, "\phi^*"] \arrow[d, "\rho(\phi(g)_s)"'] & k[G] \arrow[d, "\rho(g_s)"] \\ k[G'] \arrow[r, "\phi^*"] & k[G] \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} k[G'] \arrow[r, "\phi^*"] \arrow[d, "\rho(\phi(g)_u)"'] & k[G] \arrow[d, "\rho(g_u)"] \\ k[G'] \arrow[r, "\phi^*"] & k[G] \end{tikzcd}$$

sind kommutativ. Die Zuordnungsvorschriften für diese beiden Diagramme bekommen so die folgende Gestalt (wir verwenden "ξ" als gemeinsame Bezeichnung für "s" und "u").

$$\begin{array}{ccc} f(x') & \mapsto & \phi^*(f)(x) \;=\; f(\phi(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(x'\bullet\phi(g)_\xi) & \mapsto & f(\phi(x)\bullet\phi(g)_\xi) \;\; f(\phi(x\bullet g_\xi)) \end{array}$$

Es gilt also

$$f(\phi(x)\cdot\phi(g)_\xi) = f(\phi(x\cdot g_\xi)) \text{ für } f\in k[G'],\ x\in G,\ g \in G \text{ und } \xi\in\{s,u\}$$

Speziell für x = e ist

$$f(\phi(g)_\xi) = f(\phi(g_\xi)) \text{ für } f\in k[G'],\ g \in G \text{ und } \xi\in\{s,u\}$$

Alle Funktionen $f \in k[G']$ haben in den Punkten $\phi(g)_\xi$ und $\phi(g_\xi)$ von G denselben Wert. Insbesondere haben die beiden Punkte dieselben Koordinaten, d.h. es ist

$$\phi(g)_s = \phi(g_s) \text{ und } \phi(g)_u = \phi(g_u) \text{ für jedes } g \in G$$

wie behauptet.

<u>Zu (iii)</u>. Wir setzen

$$V := k^n$$

und betrachten

$$G = GL(V)$$

als Gruppe der k-linearen Automorphismen von V.

$$G := GL(V) \text{ mit } V := k^n.$$

Im folgenden wollen wir den halbeinfachen bzw. lokal unipotenten Teil eines lokal endlichen Automorphismus $a: V \longrightarrow V$ mit

$$a_s, \text{ bzw. } a_u,$$

bezeichnen. Den halbeinfachen bzw. unipotenten Teil eines Elements g einer linearen algebraischen Gruppe bezeichnen wir nach wie vor mit

$$g_s \text{ bzw. } g_u.$$

Wir haben zu zeigen,

$$g_s = g_s, \text{ und } g_u = g_u, \text{ für jedes } g \in G := GL(V).$$

Wir benötigen dafür eine vorbereitende Konstruktion.

1. <u>Schritt</u>. Konstruktion eines kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde f} & k[G] \\ g\uparrow & & \uparrow\rho(g) \\ V & \xrightarrow{\tilde f} & k[G] \end{array}$$

von k-linearen Abbildungen mit injektiven Zeilen für jedes $g \in G$ und jedes k-lineare Funktion $f: V \longrightarrow k$, die nicht identisch 0 ist.

Sei

$$< x, y > := x^T\cdot y$$

das Standard-Skalarprodukt von $V = k^n$ (d.h. rechts stehe des Matrizen-Produkt für die Spalten-Vektoren $x,y \in k^n$). Dieses Skalarprodukt ist nicht-entartet, d.h. die Abbildung

$$V \longrightarrow Hom_k(V, k),\ v \mapsto <v, ?>$$

ist ein k-linearer Isomorphismus. Insbesondere hat f die Gestalt

$$f(x) = <v_f, x> = v_f^T\cdot x$$

mit einem Vektor eindeutig bestimmten $v_f \in V - \{0\}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\tilde f: V \longrightarrow k[G],\ v \mapsto (\ g \mapsto f(gv)\ ).$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn

$$f(gv) = v_f^T \bullet g \bullet v$$

ist eine lineare Funktion der Einträge der Matrix $g \in G = \mathbf{GL}(V) = \mathbf{GL}(k^n) = \mathbf{GL}_n$,

also für jedes feste $v \in V$ eine reguläre Funktion auf G. Außerdem ist $\tilde{f}(v) = v_f^T \bullet g \bullet v$ eine lineare Funktion von v,

$$\tilde{f}: V \longrightarrow k[G] \text{ ist linear.}$$

Für $v \in \mathrm{Ker}(\tilde{f})$ gilt $v_f^T \bullet g \bullet v = 0$ für beliebige $g \in G$. Da $v_f \neq 0$ ist, gibt es für jedes i ein $g_i \in G$ mit $v_f^T \bullet g_i = e_i^T$. Es gilt also $e_i^T \bullet v = 0$, d.h. die i-te Koordinate von v ist 0. Da dies für alle i gilt, ist $v = 0$. Wir haben gezeigt, $\mathrm{Ker}(\tilde{f})$ ist trivial, d.h.

$$\tilde{f}: V \hookrightarrow k[G] \text{ ist injektiv.}$$

d.h. wir können V als k-linearen Unterraum von k[G] ansehen.
Wir haben noch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde{f}} & k[G] \\ g\uparrow & & \uparrow\rho(g) \\ V & \xrightarrow{\tilde{f}} & k[G] \end{array}$$

zu beweisen. Für $v \in V$ und $g,x \in G$ gilt

$$\tilde{f}(gv)(x) = f(xgv) = \tilde{f}(v)(xg) = (\rho(g)\tilde{f}(v))(x)$$

also

$$\tilde{f}(gv) = \rho(g)\tilde{f}(v),$$

d.h. das Diagramm ist tatsächlich kommutativ.
2. <u>Schritt</u>. Abschluß des Beweises.
Die vertikalen Abbildungen im kommutativen Diagramm des ersten Schritts sind lokal endlich. Das Diagramm bleibt also kommutativ, wenn wir die vertikalen Abbildungen durch deren halbeinfache oder durch deren lokal unipotente Teile ersetzen (nach Bemerkung 2.4.7 (vi)), d.h.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde{f}} & k[G] \\ g_\xi,\uparrow & & \uparrow\rho(g)_\xi, \\ V & \xrightarrow{\tilde{f}} & k[G] \end{array}$$

ist kommutativ für $\xi = s$ und $\xi = u$. Nach Definition des halbeinfachen bzw. unipotenten Teils eines Elements einer linearen algebraischen Gruppe gilt

$$\rho(g_\xi) = \rho(g)_\xi, .$$

Das kommutative Viereck läßt sich also in der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde f} & k[G] \\ {\scriptstyle g_{\xi'}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \rho(g_\xi)} \\ V & \xrightarrow{\tilde f} & k[G] \end{array} \tag{3}$$

schreiben. Für $v \in V$, $x, g \in G$ gilt

$$\begin{aligned} f(x\bullet g_{\xi'}\bullet v) &= \tilde f(g_{\xi'}\bullet v)(x) && \text{(Definition von } \tilde f\text{)} \\ &= ((\tilde f \circ g_{\xi'})(v))(x) \\ &= ((\rho(g_\xi)\circ \tilde f)(v))(x) && \text{((3) ist kommutativ)} \\ &= \rho(g_\xi)(\tilde f(v))(x) \\ &= (\tilde f(v))(x\bullet g_\xi) && \text{(Definition von } \rho(g_\xi)\text{)} \\ &= f(x\bullet g_\xi\bullet v). && \text{(Definition von } \tilde f\text{)} \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, für jede k-lineare Abbildung $f: V \longrightarrow k$ gilt

$$f(x\bullet g_{\xi'}\bullet v) = f(x\bullet g_\xi\bullet v)$$

(für die Null-Abbildung ist das trivial). Die beiden Punkte $x\bullet g_{\xi'}\bullet v$ und $x\bullet g_\xi\bullet v$ von V haben also dieselben Koordinaten, d.h. es gilt

$$x\bullet g_{\xi'}\bullet v = x\bullet g_\xi\bullet v.$$

Speziell für $x = e$ erhalten wir

$$g_{\xi'}\bullet v = g_\xi\bullet v.$$

Wir können wir v den i-ten Standard-Einheitsvektors einsetzen und sehen so, daß $g_{\xi'}$ und g_ξ dieselbe i-te Koordinate besistzen. Da dies für jedes i gilt, folgt

$$g_{\xi'} = g_\xi$$

wie behauptet.
QED.

Index

Inhalt